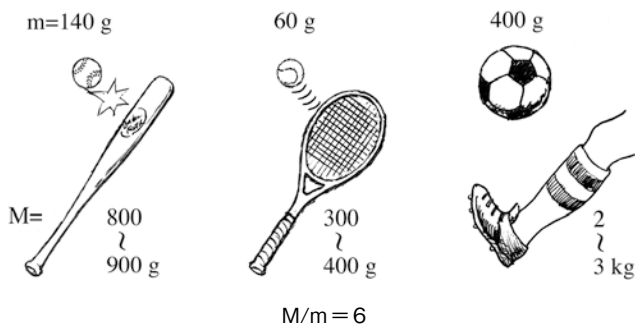


バットの重さ，ラケットの重さ



工学博士 西尾 宣明
元・東京ガス(株) 基礎技術研究所

6倍の仮説

大家 与太郎さん，昨日は町内の野球大会でしたね。成績はどうでした？

与太郎 いやあ，全然だめでした。相手のピッチャーが，凄く速い球を投げるんですよ。

後で聞いたら，甲子園には行けなかったけど県では結構有名なピッチャーだったらしいです。

大家 そうですか，私も現役の時には社内の事業所対抗の野球に出たことがあります，高校で野球をやっていたのが相手だと全然打てなかったですね。

軟式野球ですが，多分球速は90から100キロぐらいなんだと思います。しかし，草野球の我々には恐ろしく速くて，バットに当てるのも難しかったですよ。

与太郎 そうですよ。わたしは結構腕力には自信がある方ですけど，当てるのが精一杯でボテボテの内野ゴロばかりでした。

大家さん，そういう時は重いバットの方がいいのか軽い方がいいのか，どう思いますか？

大家 それは相手のピッチャーの腕力と与太郎さんの腕力のどちらが強いかにもよりますが，今度の場合はどうやら重いバットを使った方が良かったかも知れませんね。

与太郎 へえー。そうなんですか。

それにはどんな理由^{わけ}があるんですか？

大家さんのことだから，ちゃんとした理屈があるんだと思いますがね。

大家 もちろん理屈はありますよ。

実は現役のときに「6倍の定理」というのを発見したんですよ。

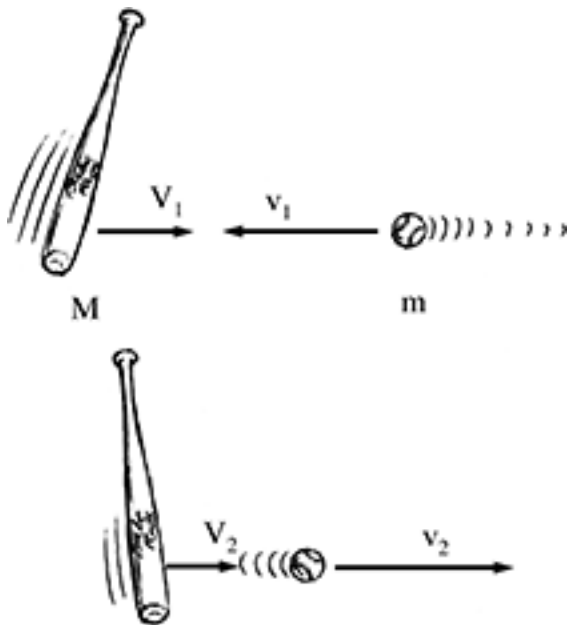
そのきっかけは野球のバットにしてもテニスのラケットにしても，重さはボールの6倍ぐらいになっているのではないかという疑問を持ったことです。

サッカーだって，足首辺りから先を打球の道具と考えれば，その重さはちょうどボールの6倍ぐらいになっていると考えたんです。その段階ではまだ「6倍の仮説」ですがね。

与太郎 それで研究を初めて，その「6倍の定理」というのを証明したんですね。それって難しいんでしょう？

大家それほど難しいものでもなかったですね。

私が考えたのは重さ m のボールが v_1 という速さでバッターの方に向かって来るのに対して，重さ M のバットを V_1 という速さに加速して打ち返すとき，打ち返されたボールの速さ v_2 はバットの重さがボールの重さの何倍のとき，つまり M/m の値がいくつのときに一番大きくなるかということです。



二つの物体 (M, m) の衝突と速度の変化

速度が v_2 と V_2 になったとします。

運動量保存の法則は「ボールとバットの運動量の合計はぶつかり合う前と後とで変わらない」ということです。式に書けば次のようになります。

$$MV_1 + mv_1 = MV_2 + mv_2 \quad (1)$$

ここで注意しなければならないのは運動量には方向性があるということです。バットが動く方向、つまり V_1 を正の方向とすれば、 v_1 は負の値です。ぶつかった後の v_2 が正、負どちらの値になるかは M が m の何倍かなどによって決まります。

次にエネルギーの方ですが、バットとボールの運動エネルギーはそれぞれ $MV_1^2/2$ 、 $mv_1^2/2$ と書けます。

運動エネルギーは速度を2乗するので常に正、つまり方向性はありません。

バットとボールがぶつかった後は運動量と同じく添字1を2と書き換えるだけです。

そうすると、1/2は全部についていますから省略できて、エネルギー保存の式は次のようになります。

$$MV_1^2 + mv_1^2 = MV_2^2 + mv_2^2 \quad (2)$$

V_1 と v_1 は前もって分かっているとすれば、この二つの式は V_2 と v_2 を求める連立方程式ということになります。

与太郎 連立方程式か。何だか懐かしいなあ。

こんなに複雑な式を解いて見ろって言われても多分ダメだと思うけど。

大家 うーん。代数式のままで解くのは扱い慣れていないと確かに難しいかな。

と言うことで、結果だけ示すと次のような式が得られます。この場合、一番知りたいのは打たれた球の速さなので、 v_2 の答だけを書いておきます。

$$v_2 = \frac{2 \frac{M}{m} V_1 - \left(\frac{M}{m} - 1 \right) v_1}{\frac{M}{m} + 1} \quad (3)$$

与太郎 やっぱり難しそうな式だなあ。

大家 見掛けほど難しい式ではないですよ。

与太郎 今の説明聞いただけでも何だか難しそうですよ。

大家 与太郎さんはもう忘れているでしょうが、高校の物理で教わった基本中の基本、「運動量保存の法則」と「エネルギー保存の法則」の二つを使うだけなんです。それに、「微分」ということが後で出てきますが、これも高校で教わる範囲のものです。

与太郎さんには結論だけ分かって貰えればいいんですが、一応理屈の流れをざっと説明しますね。

後でゆっくりと高校のときに習ったことを思い出してもいいし、小太郎坊や(与太郎さんの長男)が高校に進んだときに練習問題として与えるのもいいと思いますよ。

小太郎君は理科や算数が好きなようだから、こういう練習問題はうんと役に立つと思いますよ。

与太郎 今のわたしにはとても歯が立たないと思いますよ。息子が高校に行くまで取って置きます。

M/mとボールの速度 v_2 の関係

大家 では、一応定理の証明を書いてみますね。

まず、運動量は重さ(質量)に速度を掛けたものです。そうすると最初のボールの運動量は mv_1 でバットの運動量は MV_1 です。

次に、ボールとバットがぶつかった後のそれぞれの

バットの重さがボールの何倍か、つまり M/m の値が分かっているならば、 v_2 の値が V_1 と v_1 によってどう決まるかはこの式で簡単に求められますね。

一例として、うんと軽い、したがってほとんど M が 0 に近いバットで打つ場合は、(3) の式で $M/m = 0$ とすれば

$$v_2 = v_1$$

となることが分かります。これはボールが全く速度を変えずに（方向も変えず）そのまま捕手のミットに納まることを意味します。

次に、物凄く重いバットで打つ場合を考えます。この時、 $M/m \approx \infty$ （無限大）と近似すれば、

$$v_2 = 2V_1 - v_1$$

となります。

これから、ボールは元の速さにバットの速さの2倍を加えた速さで弾かれることが分かります。

v_1 はマイナスの値ですからね。

与太郎 でも、バットが重過ぎると速く振れなくなっちゃうんじゃないですか？

大家 そうそう。そこが重要なところですね。

実際には M/m が無限大だと、 V_1 はゼロになってしまうから、壁に向かって投げたときと同じで、投げたボールと同じ速さで跳ね返ることになります。

実際には手頃な重さのバットを使えば結構大きな V_1 で振ることができますから、 v_1 よりも大きな速さで打ち返すことができます。

与太郎 その手頃な重さって (3) の式からどうすれば分かるんですか？

大家 与太郎さん。なかなかいい質問ですね。

実は (3) 式から直接求めることはできません。

もう一つの別な条件を仮定する工夫が必要です。

ピッチャーとバッターの力較べ

大家 最初に、ピッチャーとバッターの力関係で答は違うと言ったでしょう？

その力関係ですが、ピッチャーもバッターもお互いに全力でボールを投げ、バットを振るものとします。

テニスだったら、単純に、お互いに全力で打ち合うということですね。

その全力がボールに乗り移って、 v_1 という速さで自分、つまりバッターなりテニスのプレーヤーに向かっ

てくると考えるんです。

そのボールの運動エネルギーは

$$E_a = \frac{mv_1^2}{2}$$

と表されます。

それを受ける側も全力で応じて、バットやラケットの運動エネルギーは

$$E_b = \frac{mV_1^2}{2}$$

になります。

この両者のエネルギーの比をとって、それを ϕ と置きます。つまり、

$$\phi = \frac{E_b}{E_a} = \frac{MV_1^2}{mv_1^2}$$

です。

この式から V_1 は次のように表すことができます。

$$V_1 = |v_1| \sqrt{\phi \frac{m}{M}}$$

与太郎 この二本棒がついてるのはどんな意味なんですか？

大家 v_1 と言うのは V_1 とは方向が逆、つまりマイナスの値なんです。しかし、 ϕ の式では2乗されてプラスの値になっていて、その平方根が V_1 の式に入るので、プラスの v_1 と言う意味で絶対値の記号で表したものです。

与太郎 大家さんはあんまり難しくないって言ったけど、そういう細かいところまで考えないと答が間違ってしまうんじゃない、わたしら素人にはとても計算なんかできないですよ。

大家 言われてみると確かに、与太郎さんにやってみると言っても無理だったかも知れませんね。

しかし、ここまで来ちゃったのだから、ともかく結論まで行ってしましましょうね。

上に書いた V_1 を (3) 式の V_1 に置き換えると、(3) 式は次のように書き換えられます。

$$v_2 = \frac{2|v_1| \frac{M}{m} \sqrt{\phi \frac{m}{M}} - \left(\frac{M}{m} - 1\right)v_1}{\frac{M}{m} + 1} \quad (4)$$

式を見やすくするために $M/m = x$ と置いて (4) 式を整理し直すと次のようになります。

$$v_2 = \frac{2|v_1|\sqrt{\phi x - (x-1)}v_1}{x+1}$$

この式の両辺を $|v_1|$ (v_1 の絶対値) で割って、最終的に次の式が得られます。

$$\frac{v_2}{|v_1|} = \frac{x+2\sqrt{\phi x - 1}}{x+1} \quad (5)$$

随分簡単な式になったでしょう。

与太郎 本当だ。でも、何で $|v_1|$ (v_1 の絶対値) で割ったんですか？

大家 v_1 と v_2 は方向が違っても、ここでは大きさの違いが重要なので、符号を外すためです。それから

$$\frac{v_2}{|v_1|} = -1$$

となることにも気をつけなければいけませんね。

与太郎 大家さんは簡単そうに言ってますけど、そういう細かいところにも気が回らないと駄目なんですね。だから難しいんだ。

大家 そう言えば、アルバート・アインシュタインが宇宙方程式を解いて、ある重要な問題をとても簡潔な形で解けたと発表したことがあるんです。

私がまだ学生の頃ですが、新聞にも記事が出て、結構な騒ぎになったものです。

与太郎 大家さん、それってアインシュタインのことですか？

大家 そうです。彼はドイツで生まれたけれどもナチスに追われてアメリカに亡命しました。そして、アメリカ人として生涯を終えています。

だから、アメリカではアルベルト・アインシュタインでなくアルバート・アインシュタインで通っていた筈です。彼と親しかった日本の物理学者が訳した「アインシュタイン講演録」という本だってありますよ。

与太郎 そうなのか。大家さんはそれにこだわってるんだ。

大家 こだわりますとも。

ところで、アインシュタインがもう一度自分で検算したら、計算の途中の一箇所でプラスをマイナスと書き

違えていたのを見つけて、論文を取り消して謝ったんですね。私までも何だかがっかりしたのを覚えてますよ。

与太郎 そういうことってあるんですね。

で、(5) の式からはどんなことが分かるんですか？

「6倍の定理」

大家 数学的な常套手段としては、 $v_2/|v_1|$ を最大にする x の値を求めるには「(5) 式を x で微分して得られる式をゼロと置き、その根を求める」というスマートな方法があります。

それでやってみると、答は次のようになります。

$$x = 1 + \frac{2}{\phi} (1 + \sqrt{1 + \phi}) \quad (6)$$

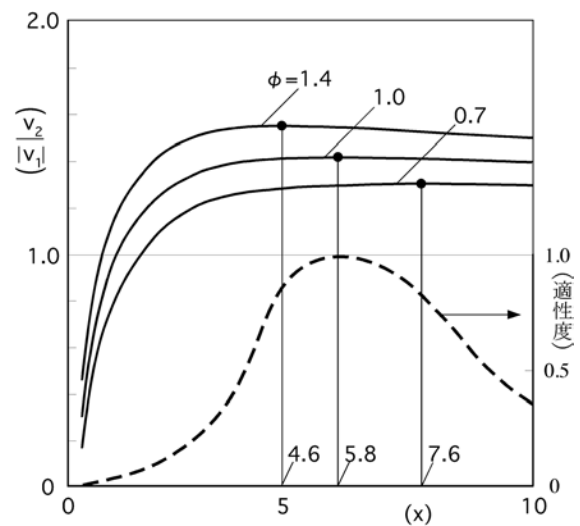
仮にピッチャーとバッターのエネルギーが拮抗しているとすれば $\phi = 1$ になりますが、その時バッターにとって一番強く打球が返せる、つまり v_2 を一番大きくできるバットの重さはボールの 5.8 倍と言う答が得られます。

ほら、見事に 6 倍に近い数字になっているでしょう？

与太郎 そうなんだ。それで 6 倍の定理って言うんだ。凄い発見ですね。

大家 ところが、一見スマートに見えてもそれだけではあまり実際の役には立ちません。

そこで、(5) の $v_2/|v_1|$ の式を直接グラフに描いてみました。



M/m と v_2 の関係

この図を見ると、 x の値の広い範囲にわたって $v_2/|v_1|$ の値はあまり変わらないことが分かります。

与太郎 x が3ぐらいでもあんまりボールの跳ね返りの速度(v_2)は小さくならないですね。

大家 そうなんです。ただ、実際には軽過ぎるバットやラケットだと打ったときの腕への衝撃が大きくなってテニスエルボーのような故障の原因になります。

また、重過ぎるラケットで走り回ったらそれだけで疲れてしまって勝負になりません。

そのような、運動量と運動エネルギーの交換以外の条件まで考えに入れると最適なバットやラケットの重さの範囲はかなり狭くなって、図の破線で描いたグラフのように「適性度」が高い範囲はかなり狭くなると思います。

図の破線は $\phi = 1$ のときのものですが、ボールを打つ側のエネルギーのほうが小さければ破線は右の方に動き、大きければ左に動くと思います。

与太郎 そうなんだ。町内会の野球のことでさっき大家さんが言ってた重いバットの方がいいっていうのは、相手の方が強いので ϕ が1よりも小さくなるからということなんですね。

やっぱり「6倍の定理」なんだ。

大家 6倍の定理からすれば、ラケットの重さは男でも女でも変わらないということになりますね。実際、女性用のラケットは男性用より20グラムぐらいしか軽くないようです。

与太郎 そうなんだ。大家さんはどのぐらいのラケットを使ってたんですか？

大家 私がテニスを始めた頃は380グラム以上のラケットでしたね。木のラケットでね。

しかし、今ではグラスファイバーで補強したプラス

チックのフレームになって、随分軽くなりました。私が最後に使っていたのは約300グラムです。今では初心者向けの260グラムぐらいのものもあるようですね。

与太郎 へえー。それじゃあ、ボールの4倍ちょっとじゃないですか。

大家 そうですね。材料が進化して、軽くても頑丈なものになったので打球の面を大きくすることができた。それによってラケットの重心とスイートスポットの位置を近づけることができた。

そんなことで、必ずしも6倍の重さが要らなくなったのだと思います。

とくに、サーブの場合は止まったボールを打つので、軽いラケットの方が速いボールを打てます。

与太郎 それで…。あの錦織選手のラケットも300グラムなんですよ。大家さんとおんなじなんだ。

野球の方は止まったボールは打たないからいつでも6倍なんですね。松井秀喜選手のバットは910グラムでイチロー選手は900グラムだそうです。

大家 ほう。詳しいんですね。

確かに、野球のバットはほぼ理屈通りですね。

金属バットの場合は軽くすると飛びやすいことと、折れ易くなって危険なことから、重さを900グラム以上に規定されているんですね。

与太郎 ええっ!? あれって木のバットより重いんですか。子供も使うから軽いのかと思ってましたよ。

大家 さっきのグラフからも重い方がボールは飛びにくくなりますからね。これも理に叶っているんですね。

でも、公認野球規則を作った人たちが6倍の定理を知っていたかどうかは分かりません。

与太郎 多分知ってなんかいないと思いますよ。

