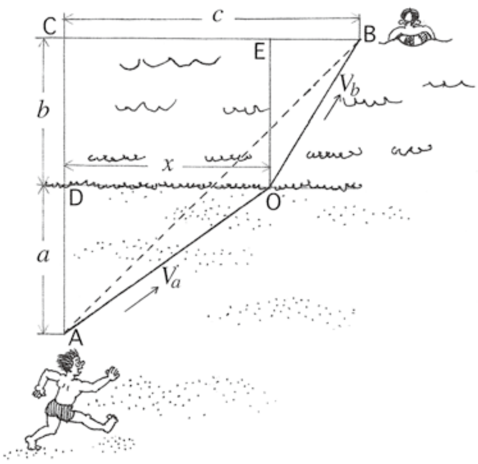
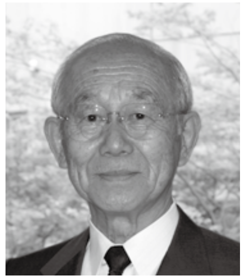
知って得する　　身近な・Science

急がば曲がれ



一番早く子供のところへ行くには…



工学博士　**西尾　宣明**

元・東京ガス㈱ 基礎技術研究所

息子が溺れてる?!

大　家　もう学校の夏休みも終わりましたね。何か楽しいことはありましたか？

与太郎　楽しいことって言えば，久しぶりに海水浴に行きました。少し前にサメが出たなんて話があったせいか，あんまり混んでいなくてとても良かったですよ。

　でも，ちょっとヒヤッとすることもありました。

大　家　ほう，どんなことですか？

与太郎　砂浜で休んでいたら，いつの間にか坊主がいないんですよ。慌てて探したら波打際から2，30メートル沖の方に見覚えのある浮き輪と帽子の子がぷかぷか浮かんでるじゃないですか。

　大変なことになったと思いましたね。慌てて息子に向かって走って行ったんだけど，砂浜から水に入ると途端に足が重くなってノロノロ歩くような感じで，気は急くし，あんなに焦ったことはないですね。

大　家　坊やは無事でしたか？

与太郎　遠浅だったんで，深さはわたしの腰ぐらいもなかったけど，あと10メートルも先に行ったら息子の足も届かなくなって，どんどん沖に流されるところでしたよ。

大　家　とにかく無事で良かったですね。

　水の中で走るのは大変ですからね。膝ぐらいの深さでももう走るなんてできませんから。

　その時は休んでいたところから坊やのところまで真っ直ぐ走って行ったんでしょう？

与太郎　そうですよ。真っ直ぐ行くのが一番早く行けるんじゃないですか？

大　家　ところがそうじゃないんですよ。回り道をした方が絶対に早いんですよ。それは覚えておいた方がいいですね。来年はきっと役に立ちますよ。

与太郎　来年はそんな危ないことはさせませんよ。

　でも回り道の方が早いっていうのは興味がありますね。どんなカラクリですか？

大　家　カラクリと来ましたね。そのカラクリには代数を使います。ごく簡単な,代数学の入り口ですがね。

与太郎　代数だなんて，分かるかどうか心配だなあ。

大　家　電気技術者の与太郎さんが代数を怖がっていたのでは困りますね。代数とは読んで字のごとく実際の数字の代わりにアルファベットなどの文字を使うというだけの話ですからね。

与太郎　もっぱら現場の仕事ばっかりなんで，代数なんてすっかり忘れてますよ。

最短時間を求めるには

大　家　ともかく，浜辺の回り道の話を代数で調べて

みましょう。

こういう図を描きますね。与太郎さんがA点にいる時，B点にいる坊やを見つけたわけです。そして，与太郎さんはA点からB点に向かって真っ直ぐ点線のように走って行ったわけですね？

与太郎　そうです。

大　家　実際にはA点からB点に行く方法は無数にあります。その一つの例を「まずAから波打際Oに向かい，そこから水中をBに向かって進む」として図のように表します。

また，A点から波打ち際に直角な線とB点から波打ち際に平行な線を引いて，二つの線が交わるところをC, AからCに引いた線が波打ち際と交差する点をDとしておきます。

与太郎　そんな風にA，B，C…と来るだけでなんか難しそうだと思っちゃうんですよ。

それにO点ってどうやって決めるんですか？

大　家　これからそれを決めるわけです。今は適当な位置に仮に置いただけです。

それからA，B…というのは代数でもなんでもなくて，地図の上に目印をつけただけなんです。目印がないと色々なところの距離や寸法が測りにくいですからね。ただそれだけのことですよ。

その目印の間の距離をaメートル,bメートル,cメートルのように測るわけです。これは代数です。

そして，O点をどこに決めると一番短い時間でB点に着くか，つまりD点から測ったO点までの距離xをどれだけにするのが良いか，というのがこの場合の問題なわけです。

与太郎　そうか，ただの目印か。そう考えれば別に難しくはないですね。

大　家　そうでしょう。そこで，次に必要なことはAからO，OからBの間を走るのに何秒かかるかということです。それが分かるには砂地を走る時の速さと水の中を走る速さが分からないといけません。ここではそれぞれV_aとV_bと仮定します。単位は〔メートル/秒〕としておきましょう。

与太郎さん，A点からO点までの距離を速さV_aで走ると時間は何秒かかりますか？

与太郎　えーと。あれ？ AからOの距離がわからないですね。

大　家　距離は分かっているようなものですよ。三角形AODは直角三角形でしょう？

与太郎　・・・・あっ，思い出した。ピタゴラスの定理っていうのを使うんでしょう？

そうするとaの二乗とxの二乗を足したのが，斜めの線のAからOまでの距離の二乗に等しいっていうことでしたね。だから，その平方根を取ると距離になって，その距離を速さで割ると時間になるわけですね？

大　家　お見事，お見事。中学校で習ったピタゴラスの定理がこんなに役に立つとは思わなかったでしょう？

与太郎　そうですね。中学で習ったことって結構大事なんだ。

大　家　それが基礎ですからね。スポーツでも学問でも，家はもちろんのこと，何事も基礎が一番大事です。

それはともかく，与太郎さんが言ったAからOまでの距離を数式に表すとこうなります。

$$\sqrt{a^2+x^2}$$

これをV_aで割れば時間になります。

次に，OとBの間の距離は直角三角形OBEの二辺bとc-xを二乗して足し合わせ，平方根をとって

$$\sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

これをVbで割ればOとBの間の時間になります。

これらの二つの時間を足し合わせれば

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{V_a}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{V_b}$$

となります。この式のxの値を色々に変えた時に，時間tが一番小さくなるようなxが探し出せれば，それがO点をどこに選べば一番早くB点まで行けるかの答えになります。

どうです？与太郎さん。

与太郎　なんか，マジックを見てるような気がしないでもないけど，理屈どおりに式を組み立てれば答えが出せるという感じが分かったような気がしますね。

大　家　そう思ってくれれば嬉しいですね。解説のし甲斐があったというものです。

最短時間を求める例

与太郎　でも，これから一番早く着く時間を求めるの

は難しそうですね。

大　家　与太郎さんにも難しそうなのがわかりますか。

実際，この式を数学的に解くのはとても難しいことです。一般にはこの時間の式をxで微分して得られた式をゼロと置いて，その根になるxの値を求めるという手続きになるんですが，元の式に平方根の項があるために，四次方程式の根を求めなければなりません。

その手続きが複雑で，私にはとても代数式のままで根を求める気力はありません。

与太郎　大家さんでもそんなことがあるんですか？

私の頭の中はスッチャカメッチャカですがね。

大　家　大有り（尾張）名古屋の金の鯱鉾ですよ。代数式のままで簡単に計算できるような都合の良い場合はむしろ希と言ったほうがいいですね。

最近では元の式のままコンピューターに乗っけて，コンピューターの力技で解いてしまう方法がありますが，私のようなガラパゴス人間，つまり，大学でコンピューターを習ったことがない者にはそれも難しいことです。

与太郎　パソコンでも「エクセル」などのソフトを使えば割と簡単にいろんな計算ができますよね。

大　家　私にはもっと簡単な式の場合でないと手間ばかりかかって，疲れてしまうんですよ。

そこで，今度の場合も，私は手の平サイズの関数電卓で直接計算して見ました。

計算を簡単にするためにさっきの式の両辺にV_aを掛け，cで除してこんな風にしました。

$$\frac{\mathrm{V}_a}{c}t=\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{x}{c}\right)^2}+n\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(1-\frac{x}{c}\right)}$$

与太郎　なんか，前よりも複雑になったように見えるけど…。

大　家　書かれた文字の数が増えただけで，実際にはうんと簡略化されているんですよ。

ほら，aもbもxも全部cに対する比率で表されているから，応用範囲が広くなると思います。実際にかかる時間を知りたければ，cを掛けてV_aで割ればいいんです。

与太郎　この式にnって書いてあるのはなんですか？

大　家　ああ，その説明を忘れていましたね。

それは最初のtの式にV_aを掛けると，右辺の第2項には砂浜を走る速さと水中を走る速さの比のV_a / V_bというものが出てきます。これは後で説明しますが，実は屈折率に相当するものです。屈折率は一般にnという記号で表すので，それを使ったわけです。

与太郎　そうですか。それで計算はどんな具合になったんですか？

大　家　そうですね。じゃあ，計算の例を見せてあげましょうね。

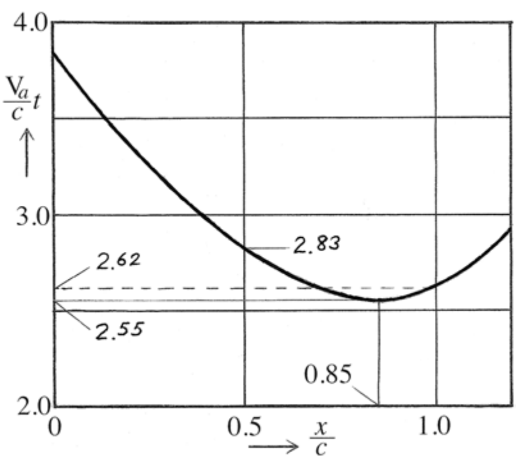
与太郎さんと坊やの事件の現場の具体的な数字などは分からないので，さっきのcに対する比率を仮定しての計算になります。

ここではaもbもcの2分の1ということにします。また，水の中よりも砂浜の方が3倍早く走れると仮定します。つまり$n=3$ということですね

そうすると，さっきの式は次のように簡単になります。

$$\frac{\mathrm{V}_a}{c}t=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{x}{c}\right)^2}+3\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{x}{c}\right)^2}$$

この式のx/cの値を色々に変えて式の値を計算して，x/cとの関係をグラフに書くとこんな風になります。



海に入る位置xと到着時間tの関係

このグラフでtが一番小さくなる時のx/cの値はほとんど正確に$x/c=0.85$になることがわかります。

つまり，xがcの85％になるような位置にOを決めて，そこに向かって砂浜を走り，そこからはBに向かってまっすぐ坊やのところに向かうのが一番早く行けるということです。

与太郎　へえー…，そうなんだ。こんな風にグラフになってると分かりやすいですね。

そうすると，息子に向かってまっすぐ行った時は，

aとbがおんなじだから，xはcの半分ですね。そうするとx/cは0.5で，時間の式は2.83ですか？そして，一番時間が短い時の2.55に比べると1割以上長くかかるんですね。

大　家　そうですね。普通だったら1割ぐらいの違いはどうでもいいことが多いでしょうが，1秒でも早くと焦っている時には結構大きな違いですね。

与太郎　そうですとも！

大　家　実際にはxをcのぴったり85％にしなくても，70％から100％の間なら時間は2.62以下だから（破線参照），まあ，大雑把にその辺を狙って走れば十分でしょうね。

水の中を走る速さが砂の上の場合の3分の1よりもっと遅いとすれば，最適なxはもっとcに近づけた方が有利になりますね。

与太郎　あ，分かった。これが本当の「急がば廻れ」っていうことですね。

大　家　うまいうまい。与太郎さん。座布団1枚上げましょう。

屈折率とフェルマーの原理

大　家　今日のお話は来年の夏休みには多分役に立たないと思いますが，私はこの計算をして見てとても面白いことを発見しました。

与太郎　そうですか。大家さんは転んでもただでは起きないからなあ。今日の話では別に転んだわけじゃないけれども，砂浜から何か拾い物をしたんですか？

大　家　そう，思いがけない拾い物をしましたよ。

それはね，曲がった方が早く行けるということは光の屈折と全く同じだということを発見したんです。

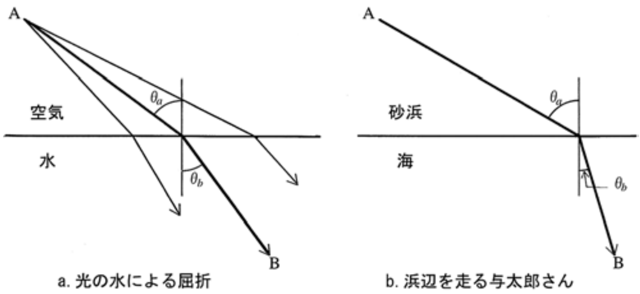
与太郎　へえー。なんかすごい発見のようですね。

大　家　与太郎さんは光の屈折率というのを知っているでしょう？

与太郎　虹の話とかプリズムの話とか眼鏡のレンズのこととか，大雑把なことは知ってると思いますがね。

大　家　光が空気などから水やガラスなどの違う媒体の中に進む時に屈折が起きるのは，光の進む速度がその媒体ごとに違うからなんですね。その屈折の様子はこの図のように表されます。

図は媒体aからbに入射角θ_aでぶつかって屈折角θ_bで進むことを表しています。その時の屈折率は



屈折の原理は同じ？

$$n_{ab} = \frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_b} = \frac{V_a}{V_b}$$

という，とても簡単な関係で表されます。

これは「スネルの法則」と呼ばれています。

与太郎　媒体のaとbっていうのは，例えば空気と水っていうことで，V_aとV_bは空気中と水中の光の速さっていうことですか？ それから，この記号（θ_a）は「シータ・エー」って読めばいいんですね？

大　家　そうです，そうです。

空気中の光の速さは真空中に比べて0.03％ぐらい遅いだけですが，水の中の速さは約75％とかなり遅くなります。そして，屈折率は光の波長によって少しずつ変わりますが，平均して1.33前後になります。

屈折率の式を証明するのは光を波動と考えればとても簡単なんです。ここでは説明は省きますがね。

ところで，さっきの浜辺の問題では

$$n = \frac{V_a}{V_b} = 3$$

と仮定しましたね。

そこで思いついたのが，この場合でも光と同じく

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_b} = 3$$

になっているかもしれないということです。

この右側の図には与太郎さんの最短時間の経路も描いておきました。光と同じになるように，砂浜と海の位置を最初の図と逆にしてありますがね。

与太郎さん，この図から$\sin\theta_a$を計算するとどうなりますか？

与太郎　突然そんなことを言われたって・・・サインは斜めの辺で向こう側の辺を割って，コサインは斜め

の辺で下側の辺を割るんだったかな？

じゃあ，大家さんの関数電卓貸してもらえますか？

大　家　いいですよ。使い方分かりますね。

与太郎　二乗と平方根それに足し算と割り算だけですよね。なんとかなるでしょう。

えーと，最初にAOの長さですね。

$$AO=\sqrt{0.5^2+0.85^2}=0.986$$

$$\sin\theta_a=\frac{0.85}{0.986}=0.862$$

次はOBを計算して$\sin\theta$bですね。

$$OB=\sqrt{0.5^2+0.15^2}=0.522$$

$$\sin\theta_b=\frac{0.15}{0.522}=0.287$$

それで$\sin\theta_a$を$\sin\theta_b$で割ると，答えは3.00348・・。

これって最初に仮定した$n=3$っていうのとほとんど一緒じゃないですか？

大　家　そうなんですよ。

屈折といえば，大抵は光を波と考えて説明するのが普通だけれども，驚いたことに，与太郎さんが波打ち際で走るという現象にも全く同じ法則が成り立っているらしいんですね。「フェルマーの原理」とスネルの法則が・・・。

与太郎　フェルマーの原理ってなんですか？

大　家　「光が2点間を伝播する時，時間が最小になるような経路を取る」というものです。もっとも，与太郎さんはAからBにまっすぐ走りましたがね。

与太郎　わたしは光じゃありませんからね。

大　家　いや。光だって最短時間になるように考えて走るわけではないと思いますよ。もしA点から放射状に無数の光線が出ているとすれば，たまたまB点を通過する光線だけがフェルマーの原理に従っているようにみえるだけで，他の光線は全部B点からはそっぽを向いているわけです。

与太郎　フェルマーの原理っていうのは人間に都合の良いところだけを見たらそうなってるっていうことですか。

大　家　私も与太郎さんの考えに賛成ですね。

今度の例題でもう一つ面白いと思ったのは，光を粒子と考えていたニュートンがどうして光の屈折，つまりスネルの法則が，波ではない粒々の光にも当てはまることを知っていたのかということです。

もしかしたら，フェルマーの原理は浜辺の与太郎さんの例と同じく粒々の光にも当てはまると考えたのかもしれませんね。

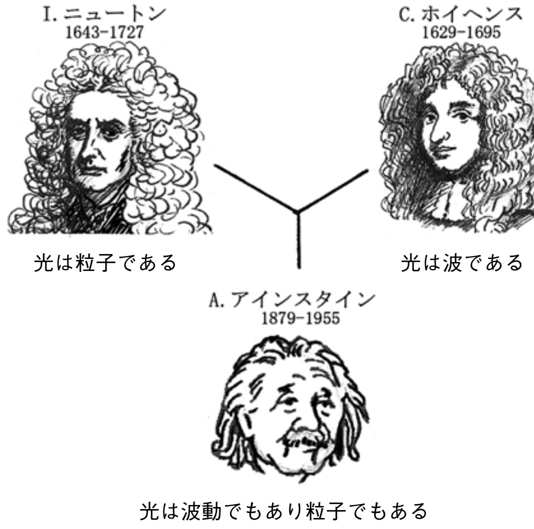
与太郎　それはすごいですね。ニュートンも大家さんもおんなじことを考えていたっていうことでしょう？

大　家　それは褒めすぎですよ。私はニュートンの爪の垢を煎じて舐めた程度の人間ですから。

ただ，ニュートンの当時，光を波動と考えた方が色々便利なことが多くて，ニュートンの旗色が悪かったんですが，プリズムや虹による分光の場合は色々な色の光の粒があって，媒体の中での速度も違うとしたニュートンの考えの方が便利だったんですね。

その後，アインスタインが「光は波でもあり粒子でもある」ということを発見して，両方丸くおさまることになったわけです。それが量子論の先駆けにもなったということですね。

与太郎　そうなんだ。そういう歴史も面白そうですね。



光は波動でもあり粒子でもある